

Abb. 3 zeigt das Ergebnis einer Rechnung. Der Anschluß der beiden Zonen ist überall gut. Für $\xi > 0,5$ ist auch die Darstellung der stromlosen Zone brauchbar. In Kathodennähe treten jedoch in der stromlosen Zone radiale Oszillationen der Temperatur auf, die sicher unrealistisch sind. Jedoch sind in Kathodennähe auch die der Rechnung zugrunde liegenden Annahmen nicht mehr zutreffend, da dort die Radialkomponenten von Geschwindigkeit und Feldstärke nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Den Spannungsabfall längs des Bogens berechnet man mit Hilfe von (34) zu

$$U = \int_0^Z E \, dz = \frac{2 \lambda_0 B^{1/2}}{a} \ln \left\{ \frac{1 + (1 - e^{-2 \lambda_0^2 Z/a})^{1/2}}{1 - (1 - e^{-2 \lambda_0^2 Z/a})^{1/2}} \right\}, \quad (60)$$

Diese Beziehung wurde schon in ⁵ abgeleitet. Sie läßt sich für große Bogenlängen Z vereinfachen. Für

$Z = \infty$ wird $U = \infty$. Ist Z endlich, aber so groß, daß $e^{-2 \lambda_0^2 Z/a} = \varepsilon \ll 1$ (61)

ist, dann wird

$$U = (\lambda_0/B^{1/2}) Z + (a/(B^{1/2} \lambda_0)) \ln 2. \quad (62)$$

Aus (62) kann die Abhängigkeit der Bogenspannung von der Bogenlänge Z , dem Bogenradius $r_0 = 2,405/\lambda_0$, der Materialkonstanten B und der Anströmungskonstanten a abgelesen werden. Eliminiert man λ_0 mittels (48), so erhält man

$$U = \frac{2 \pi}{I} \frac{\tilde{S}}{s} Z + \frac{\ln 2}{2 \pi} \frac{a}{B} \frac{s}{S} I. \quad (63)$$

Die Spannung setzt sich aus einem Glied fallender ($\sim 1/I$) und einem Glied steigender Charakteristik zusammen. Multipliziert man (62) mit I , so erhält man die Bogenleistung:

$$UI = \frac{I}{B^{1/2}} \left(\frac{2,405}{r_0} Z + \frac{a r_0}{2,405} \ln 2 \right). \quad (64)$$

Eine Untersuchung der Vorgänge in supraleitenden Flußpumpen

HANS VOIGT

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen

(Z. Naturforsch. 21 a, 510—514 [1966]; eingegangen am 3. März 1966)

Herrn Prof. Dr. TRENDLENBURG zum 70. Geburtstag gewidmet

Ein wesentlicher Vorgang beim Betrieb einer supraleitenden Flußpumpe ist das Wandern eines normalleitenden Bereiches mit einem magnetischen Fluß über eine stromdurchflossene supraleitende Platte. Die hiermit verknüpften Erscheinungen, insbesondere Spannungen und Stromänderungen, werden analysiert und führen u. a. auf einen Sättigungsstrom sowie einen bisher unbekannten Beitrag zu den Verlusten einer Flußpumpe. Die Ergebnisse werden mit dem Experiment verglichen.

Unter der Bezeichnung „Flußpumpen“ (aus dem Englischen „flux pump“) sind in letzter Zeit Anordnungen bekannt geworden, welche hauptsächlich dazu dienen, in supraleitenden Magnetspulen hohe Ströme zu erzeugen. Die Zufuhr hoher Ströme (> 1000 Amp.) zu Objekten, die sich auf der Temperatur des flüssigen Heliums ($4,2^\circ \text{K}$) befinden, bereitet wegen der Wärmeleitung und des elektrischen Widerstands der Zuleitungen große Verluste von flüssigem Helium, dessen Verdampfungswärme sehr gering ist. Es ist daher vielfältig versucht worden, mit Hilfe von supraleitenden Umformern oder Generatoren hohe Stromstärken im Heliumbad selbst zu erzeugen.

MENDELSSOHN¹ hat dies 1933 mit seinem „Gleichstromtransformator“ wohl zuerst erfolgreich getan. Hiermit können leicht sehr hohe Ströme erzeugt werden, da der Vorgang nur einmal ausführbar ist, jedoch nur in Kreisen sehr kleiner Selbstinduktivität. Hohe Magnetfelder können deshalb mit dieser Methode nur in sehr kleinen Volumina (verglichen mit der Größe des Umformers) erzeugt werden. Dies trifft auch für die ähnlichen „Flußkompressoren“² und „Flußkonzentratoren“³ zu, welche ebenfalls nur einen einmaligen Vorgang zulassen.

OLSEN⁴ dagegen hat eine periodisch arbeitende Anordnung angegeben, welche im wesentlichen aus einem Transformator mit supraleitenden Wicklungen

¹ K. MENDELSSOHN, Nature (Lond.) 132, 602 [1933].

² P. S. SWARTZ u. C. H. ROSNER, J. Appl. Phys. 33, 2292 [1962].

³ C. F. HEMPSTEAD, Y. B. KIM u. A. R. STRNAD, J. Appl. Phys. 34, 3326 [1963].

⁴ J. L. OLSEN, Rev. Sci. Instr. 29, 537 [1958].



besteht sowie aus zwei supraleitenden Schaltern, die sich selbst steuern und dadurch als Gleichrichter wirken. Verschiedene Variationen dieses Prinzips sind in der Folgezeit bekannt geworden. LAQUER⁵ schaltet durch Erwärmen eines Supraleiters, HEMPSTEAD et al.³ mechanisch.

An Stelle eines Transformators können bewegte Magnetpole treten, deren Magnetfeld auch zum Schalten der Supraleiter dient⁶. In Abb. 1 ist das all diesen Anordnungen zugrunde liegende Prinzip dargestellt. L_0 ist die Selbstinduktivität der zu erzeugen-

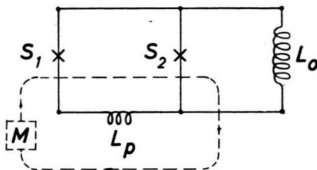


Abb. 1. Prinzipskizze einer Flußpumpe mit Schaltern S_1 und S_2 .

den Magnetspole, L_p diejenige der Sekundärseite des Transformators oder, wenn statt dessen ein bewegter Magnetpol verwendet wird, die Selbstinduktivität des aus den Schaltern S_1 und S_2 gebildeten Kreises. Von HEMPSTEAD et al.³ und besonders WIPF⁶ ist die Theorie dieser Anordnungen behandelt worden.

VOLGER und ADMIRAAL⁷ haben in enger Anlehnung an das Prinzip des Unipolargenerators eine Flußpumpe angegeben, deren wesentliches Merkmal darin besteht, daß sich ein normalleitender Bereich, der einen magnetischen Fluß enthält, über eine supraleitende Platte bewegt. Inzwischen sind mehrere Ausführungsformen bekannt geworden, die sich hiervon u. a. in der räumlichen Anordnung oder der Ausführung der Bewegung (z. B. auch durch ein Drehfeld) unterscheiden⁸⁻¹⁰. Zwei zusammenfassende Artikel^{11, 12} geben einen Überblick über die verschiedenen Modelle, auch der eingangs erwähnten Art, ihre Wirkungsweise sowie weitere Literaturangaben. In Abb. 2 ist eine Anordnung skizziert, die sich äußerlich zwar ziemlich von der bei VOLGER und ADMIRAAL zuerst angegebenen unterscheidet, in

ihrer wesentlichen Topologie dieser jedoch gleich ist. Aus dieser Abbildung ist zu erkennen, daß diese Vorrichtung trotz der verschiedenen Ausgangskonzeption gewisse Ähnlichkeit mit den durch Abb. 1 skizzierten Vorrichtungen hat. Die Arbeitsweise ist folgende: Der Magnetpol M wird von der Position a

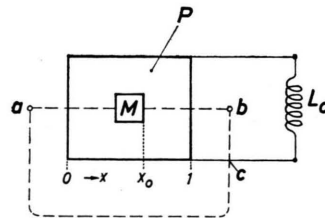


Abb. 2. Prinzipskizze einer Flußpumpe mit einer supraleitenden Platte P.

nahe über Platte P nach b bewegt. Die Anordnung ist so bemessen, daß dabei das Magnetfeld von M in der Platte einen normalleitenden Bereich erzeugt, der sich mitbewegt. Dieser Bereich enthält den magnetischen Fluß Φ . Hierauf wird der Magnetpol M wieder in die Ausgangsposition a gebracht, ohne daß Teile des Kreises normalleitend werden. Dies wird dadurch erreicht, daß er z. B. über Position c geführt wird und der dort befindliche Supraleiter eine genügend hohe kritische Feldstärke besitzt (oder dadurch, daß er in größerer Entfernung von den Supraleitern zurückbewegt wird oder seine Feldstärke vorher auf einen unterkritischen Wert gesenkt und bei a wieder hergestellt wird). Bei diesem zweiten Takt wird in der angeschlossenen supraleitenden Magnetspule mit der Selbstinduktivität L_0 ein Strom induziert von der Größe

$$\Delta I \Phi = \Phi / (L_0 + L_p), \quad (1)$$

wenn L_p die Selbstinduktivität der Platte ist.

Die genannten Autoren⁷⁻¹² setzen mehr oder weniger stillschweigend voraus, daß während der ersten Bewegung (von a nach b) in dem aus P und L_0 gebildeten supraleitenden Kreis *keine* Stromänderung stattfindet, insbesondere, daß ein schon fließender Strom keine Minderung erfährt.

⁵ H. L. LAQUER, Cryogenics **3**, 27 [1963].

⁶ S. L. WIPF, Intern. Symp. Magnet Technology, Stanford Univ., Sept. 1965.

⁷ J. VOLGER u. P. A. ADMIRAAL, Phys. Letters **2**, 257 [1962].

⁸ H. VAN BELEN, A. J. P. T. ARNOLD, H. A. SYPKENS, R. DE BRUYN OUBOTER, J. J. M. BEENAKKER u. K. W. TACONIS, Phys. Letters **7**, 175 [1963].

⁹ D. VAN HOUWELINGEN, P. S. ADMIRAAL u. J. VAN SUCHTELEN, Phys. Letters **8**, 310 [1964].

¹⁰ S. L. WIPF, Advan. Cryogenic Engineering **9**, 342 [1964].

¹¹ H. VAN BELEN, A. J. P. T. ARNOLD, H. A. SYPKENS, J. P. VAN BRAAM HOUCKGEEST, R. DE BRUYN OUBOTER, J. J. M. BEENAKKER u. K. W. TACONIS, Physica **31**, 413 [1965].

¹² J. VAN SUCHTELEN, J. VOLGER u. D. VAN HOUWELINGEN, Cryogenics **5**, 256 [1965].

Die durch Gl. (1) gegebene Größe ΔJ_Φ wäre dann die einzige Stromänderung während eines vollen Arbeitszyklus, der Gesamtstrom nach z Arbeitszyklen

$$J_z = z \Delta J_\Phi, \quad (2)$$

wenn er ursprünglich Null war und die kritische Stromstärke des Kreises nicht kleiner als J_z ist. Bei ν Zyklen je Sekunde wäre die mittlere elektromotorische Kraft im Kreis $\nu \Phi$, die mittlere „Klemmenspannung“

$$\bar{U}_+ = \nu \Phi L_0 / (L_0 + L_p). \quad (3)$$

Die Argumentation lautet gewöhnlich so, daß das im normalleitenden Bereich durch den bewegten Magnetpol erzeugte elektrische Feld vom umgebenden supraleitenden Gebiet der Platte kurzgeschlossen sei und daher in der angeschlossenen Spule L_0 keine Stromänderung bewirken könne. Auch wird der Flußerhaltungssatz für mehrfach zusammenhängende Supraleiter bei geeigneter Wahl des Integrationsweges (vor und hinter dem normalleitenden Bereich) herangezogen. Die Experimente (s. Abb. 3 und 4 sowie ¹¹⁾ sprechen gegen diese Vorstellungen. Der Strom steigt nicht linear mit z an, sondern nähert sich einem Sättigungswert (hierbei ist zu beachten, daß sich bei dicken Magnetspulen aus Hochfeld-Supraleitern auch deren Selbstinduktivität L_0 mit dem Strom ändern kann).

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, die Vorgänge beim Wandern eines normalleitenden Bereiches über eine supraleitende Platte zu analysieren, um daraus das tatsächliche Betriebsverhalten der Flußpumpen dieser Art verstehen zu lernen.

Vorgänge beim Wandern eines normalleitenden Bereichs über eine supraleitende Platte

In der Anordnung Abb. 2 fließe ein Strom J_0 durch die Spule L_0 . Mit x_0 sei diejenige Stelle der Platte bezeichnet, welche vom Normalbereich gerade erreicht wird, mit x eine beliebige Stelle im supraleitenden Gebiet der Platte. Die Breite des Normalbereiches wird vernachlässigt. Mit $i(x)$ wird die Flächendichte des Stromes an der Stelle x bezeichnet, mit $r = R/b$ und $l = L_p/b$ das Produkt aus Widerstand (wenn die Platte in ihrer vollen Breite normalleitend wäre) bzw. Selbstinduktivität und Breite der Platte, und es wird angenommen, daß r und l für jeden Bereich beliebiger Breite den gleichen Wert haben. Hat der Normalbereich, der den Fluß Φ enthält, gerade x_0 erreicht, so liegt über der Platte eine Spannung

$$\Delta U = l i'(x_0) + r i(x_0) - \Phi'. \quad (4)$$

($'$ bedeutet d/dt).

An den Stellen $x \neq x_0$ tritt dadurch eine Stromänderung ein, die gegeben ist durch

$$l i'(x) = l i'(x_0) + r i(x_0) - \Phi'$$

und in L_0

$$L_0 J_0' = l i'(x_0) + r i(x_0) - \Phi'. \quad (5)$$

Hieraus und aus der Bedingung, daß die Summe aller Stromänderungen beim Vorrücken des Normalbereichs um einen kleinen Betrag δ

$$J_0' + (1 - \delta) i'(x) + \delta i'(x_0) = 0$$

ist, erhält man eine Diff.-Gl. für $i(x_0)$ von der Form

$$i'(x_0) + A[r i(x_0) - \Phi'] = 0, \quad (6)$$

mit $A = (1/l)(1 - q\delta)$; $q = L_0/(L_0 + L_p)$.

Die Lösung lautet:

$$i(x_0, t) = e^{-Art} [i(x_0, 0) + (\Phi'/r)(e^{Art} - 1)], \quad (7)$$

womit aus (4) für die Spannung folgt

$$\Delta U = [r i(x_0, 0) - \Phi'] e^{-Art} \cdot q \delta. \quad (8)$$

Der Spannungsstoß für die Dauer τ , welche die Stelle x_0 normalleitend bleibt, beträgt dann

$$\int_0^\tau \Delta U dt = q[r i(x_0, 0) - \Phi'] \delta \int_0^\tau e^{-Art} dt. \quad (9)$$

Wir setzen voraus, daß die Bewegung des Normalbereiches nicht zu schnell erfolgt, so daß $(r/l)\tau \gg 1$ ist, die Spannung zur Zeit τ also praktisch abgeklungen ist. Dann folgt aus der Integration von (9)

$$\int_0^\tau \Delta U dt = l q [i(x_0, 0) - (\Phi'/r)] \delta. \quad (10)$$

Um diese Gleichung weiter verwenden zu können, muß die Stromdichte $i(x_0, 0)$, die der Normalbereich vorfindet, bekannt sein. Um sie zu bestimmen, machen wir die Annahme, daß $|\Phi'/r| \ll |i(x_0, 0)|$, d. h. der durch den bewegten Magnetpol im Normalbereich induzierte „Wirbelstrom“ klein gegen den Suprastrom sei. Aus (10) und (5) erhält man dann, wenn man zu einer differentiellen Verschiebung des Normalbereichs ($\delta \rightarrow dx_0$) übergeht:

$$di(x) = q i(x_0, 0) dx_0. \quad (11)$$

Diese Gleichung besagt, daß nicht der gesamte vom Normalbereich gelöschte Strom $i(x_0, 0) dx_0$ im übrigen Teil der Platte wiedererscheint, sondern nur der Bruchteil q . Durch Integration dieser Gleichung unter geeigneten Randbedingungen erhält man nach einiger Rechnung die Stromverteilung in der Platte

nach einem vollen Durchgang des Normalbereichs, $i_n(x)$, wenn diejenige vor Beginn des Durchgangs, $i_v(x)$, bekannt ist. Es ergibt sich

$$i_n(x) = q e^q \int_0^1 i_v(\xi) e^{-q\xi} d\xi - q e^{qx} \int_0^x i_v(\xi) e^{-q\xi} d\xi. \quad (12)$$

Um zu untersuchen, ob sich die Stromverteilung nach vielen Durchgängen einem stationären Verhalten nähert, wird eine Selbstkonsistenz-Bedingung eingeführt, nämlich, daß sich $i_v(x)$ und $i_n(x)$ nur noch durch eine Konstante unterscheiden sollen. Das dadurch aus Gl. (12) entstehende Integralgleichungsproblem hat eine Lösung. Dies gestattet den Schluß, daß es einen stationären Zustand gibt, für die Stromdichte ergibt sich ein linearer Verlauf:

$$i_n(x) = -2 J_0 (1 - x). \quad (13)$$

Man kann sich überzeugen, daß eine beliebige Funktion $i_v(x)$ schon nach wenigen Durchgängen des Normalbereichs, d. h. wiederholtem Anwenden der Gl. (12), einen nahezu linearen Verlauf liefert. Mit Hilfe der (nicht wiedergegebenen) Rechnung, die auf Gl. (12) führte, erhält man aus (13) für die gesuchte Größe

$$i(x_0, 0) = -2 J_0. \quad (14)$$

Der Gesamtstrom J_0 wird bei einem vollen Durchgang des Normalbereichs um den Betrag

$$\Delta J_0 = \int i_n(x) dx - \int i_v(x) dx = -2(1 - q) J_0. \quad (15)$$

verringert.

Wird der Vorgang ν -mal je Sekunde wiederholt, so folgt aus (10) als mittlere Gegenspannung, hervorgerufen durch die Bewegung des normalleitenden Bereiches mit dem Fluß Φ über die den Strom J führende Platte:

$$\bar{U}_- = -q \nu L_p (2 J + \Phi \nu / R), \quad (16)$$

die resultierende mittlere Klemmenspannung der Flußpumpe beträgt daher [s. Gl. (3)]:

$$\bar{U} = q \nu (\Phi - 2 J L_p - \nu \Phi L_p / R). \quad (17)$$

Beim „Abpumpen“ wird Φ negativ.

Der erste Term gibt die positive Spannung während des zweiten Teils eines Arbeitszyklus an, der zweite die Gegenspannung, welche daraus resultiert, daß der vom Normalbereich (unabhängig vom erhaltenen Fluß) gelöschte Strom im übrigen Teil der Platte nicht restlos wiedererscheint, der dritte Term

schließlich gibt die Gegenspannung an, welche daraus resultiert, daß die im Normalbereich durch den bewegten Fluß induzierte Spannung durch das umgebende supraleitende Gebiet (da die Platte eine endliche Selbstinduktivität hat) nicht völlig kurzgeschlossen ist und daher zu einem kleinen Teil an den Klemmen erscheint.

Die beiden letzten Glieder geben auch je einen Beitrag zur Energiedissipation. Der zweite Term liefert die Verlustleistung („Kommutierungsverlust“)

$$N_k \approx 2 L_p J^2 \nu, \quad (18)$$

bezogen auf die abgegebene Leistung:

$$N_k / N = J / (J_\infty - J), \quad (19)$$

Def. von J_∞ s. Gl. (22).

Das im normalleitenden Bereich erzeugte elektrische Feld bewirkt dort die Erzeugung JOULEscher Wärme. Die daraus resultierende Verlustleistung („Wirbelstromverlust“) beträgt ¹¹:

$$N_w = (B^2 v^2 / \rho_n) V_B, \quad (20)$$

B = Induktion, v = Geschwindigkeit, ρ_n = spezif. Widerstand, V_B = Volumen des normalleitenden Bereiches. Bezieht man auch dies auf die abgegebene Leistung, so ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{N_w}{N} = \beta \frac{N}{j_s^2 \rho_n V} \sim \frac{\text{Leistungsdichte}}{\text{„virtuelle“ Leistungsdichte}}. \quad (21)$$

β ist ein Geometriefaktor, V das Gesamtvolumen des überstrichenen Supraleiters. Die „virtuelle“ Leistungsdichte $n_v = j_s^2 \rho_n$ („virtuell“ deshalb, weil sie aus der supraleitenden Stromdichte j_s und dem spezif. Widerstand der Normalleitung gebildet ist) stellt, wenn man für j_s die kritische Stromdichte einsetzt, eine Gütezahl für den verwendeten Supraleiter dar; je höher sie ist, um so geringer ist der Wirbelstromverlust. Interessant ist, daß die Gl. (21) auch für den (Sperrstrom-)Verlust in Leistungskryotrons gilt, wie man sich leicht überlegt. Die Größe $j_s^2 \rho_n$ charakterisiert also recht universell die Qualität eines Supraleiters für derartige Vorgänge. Für Niob ist $n_v \approx 10^4$ Watt/cm³.

Wegen der bei der Herleitung von Gl. (17) gemachten Einschränkungen gilt diese nur, wenn der dritte Term klein ist gegen den ersten; trifft dies nicht zu, ist noch ein „gemischtes“ Glied zu erwarten. Aus der Bedingung, daß die mittlere Spannung U nach Gl. (17) gleich Null wird, folgt ein Sättigungsstrom für die Flußpumpe:

$$J_\infty = \frac{\Phi}{2 L_p} \left(1 - \nu \frac{L_p}{R} \right). \quad (22)$$

Eine Magnetspule konstanter Selbstinduktivität L_0 erreicht nach z Arbeitszyklen den Strom

$$J_z = J_\infty \left[1 - \exp \left\{ - \frac{2 z L_p}{L_0 + L_p} \right\} \right]. \quad (23)$$

Beim Aberregen („Abpumpen“) ist z negativ einzusetzen und so zu zählen, daß $J_{z=0} = 0$ ist.

Hiermit ist eine Beschreibung der experimentell gefundenen gekrümmten Pumpcharakteristiken und des Sättigungsstromes gegeben.

Vergleich mit dem Experiment

In der experimentellen Anordnung bestand das supraleitende Blech aus Niob (0,1 mm dick). Angeschlossen war eine Magnetspule aus Nb-Zr-Kabel mit einer Selbstinduktivität von $L_0 = 0,5$ mHy. Die Abb. 3 zeigt Meßpunkte für das Auf- und Aberregen

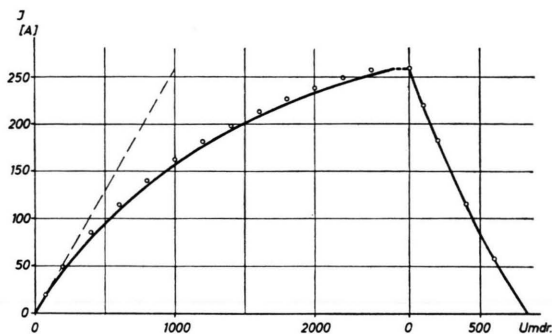


Abb. 3. Pumpcharakteristik der Flußpumpe L1 für eine Kabelspule. — — — $J = z \Delta J_\Phi$, — — — berechnet nach Gl. (23), $\circ \circ \circ$ gemessen.

dieser Spule. Die eingezeichneten Kurven sind nach Gl. (23) berechnet, wobei für Φ und L_0 die aus der Geometrie der Anordnung berechneten Werte eingesetzt sind und nur L_p angepaßt wurde.

Mit steigendem Strom wird der Anstieg immer geringer, entsprechend der wachsenden Gegenspannung während der Bewegung des Normalbereichs über das Blech. Im abfallenden Teil der Kurve („Ab-

pumpen“) addiert sich die (negative) Gegenspannung zur (jetzt ebenfalls negativen) Grundspannung $q \Phi v$. Der Abfall ist daher bei hohen Strömen steiler als bei geringen.

In Abb. 4 ist die aus der Differenz von Stromanstieg und -abfall ermittelte resultierende Klemmenspannung über dem Strom aufgetragen, welche nach

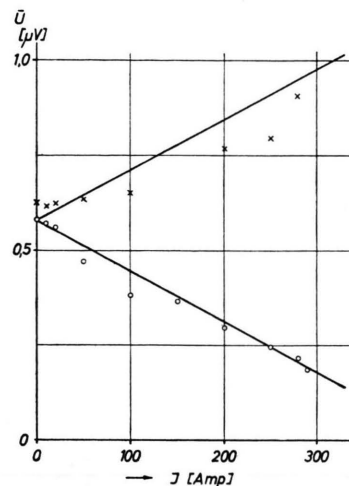


Abb. 4. Mittlere Klemmspannung der Flußpumpe M1 in Abhängigkeit vom Strom. $\circ \circ \circ$ \bar{U} beim „Aufpumpen“, $\times \times \times$ \bar{U} beim „Abpumpen“.

Gl. (17) einen linearen Verlauf zeigen sollte (der dritte Term beträgt hier nur weniger als 1% vom ersten). VAN SUCHTELEN et al.¹² haben einen ähnlichen Verlauf gemessen.

Die experimentellen Ergebnisse wurden von Herrn R. WEBER erhalten, für ihre Überlassung danke ich ihm sehr herzlich. Sie sollen an anderer Stelle ausführlicher mitgeteilt werden.